解题报告

杭州第二中学　屠学畅

1 Codeforces 587 D. Duff in Mafia

1.1 题目大意

有一张 n 个点 m 条边的无自环的无向图，每条边有颜色和边权。现在要把边集分成一个匹配和一个染色，要求最小化匹配中的边权最大值，输出任意一种方案。

一个匹配是一个边集，满足不存在两条边有公共顶点。

一个染色是一个边集，满足不存在两条同色边有公共顶点。

1.2 数据范围

$2 \le n \le 5 \times 10^4$

$1 \le m \le 5 \times 10^4$

$1 \le$ 颜色, 边权 $\le 10^9$

1.3 解题过程

考虑到一条边必须属于匹配或染色，两条边不能同时属于匹配当且仅当两条边有公共顶点，两条边不能同时属于染色当且仅当两条边颜色相同且有公共顶点。

一个自然的想法是构建 2-SAT 模型。具体来说，对于一条边 e，构造两个点 a_e, b_e，分别表示 e 属于匹配和染色。现在问题转化为对于每条边 e 选择 a_e 和 b_e 中的**一者**。

- 若 e_1 和 e_2 不能同时属于匹配，即：若选择 a_{e_1}，必须选择 b_{e_2}（不能选择 a_{e_2}）；若选择 a_{e_2}，必须选择 b_{e_1}（不能选择 a_{e_1}）。
- 若 e_1 和 e_2 不能同时属于染色，即：若选择 b_{e_1}，必须选择 a_{e_2}（不能选择 b_{e_2}）；若选择 b_{e_2}，必须选择 a_{e_1}（不能选择 b_{e_1}）。

然后考虑最小化边权，二分一个边权之后，所有边权更大的边必须属于染色，即对于一条边 e，必须选择 b_e，这也可以表示为若选择 a_e，必须选择 b_e（不能选择 a_e）。我们用连有向边来表示这种形式的限制。

由于上述限制可以达到 $\mathcal{O}(m^2)$ 级别，因此直接实现是无法通过的。我们枚举一个公共端点 u，设与其相连的所有边为 $e_1, e_2, \dots, e_k$，对于其中一条边 e_i，我们需要将 a_{e_i} 与所有 b_{e_j} $(j \ne i)$ 连边，对 $j < i$ 和 $j > i$ 分开讨论，可以用 $\mathcal{O}(m)$ 的点数和边数完成建图。

利用 2-SAT 的经典做法，可以在 $\mathcal{O}(n+m)$ 的时间复杂度内检验是否有解和求出一组解，总时间复杂度 $\mathcal{O}((n+m)\log m)$。

2 Codeforces 674 F. Bears and Juice

2.1 题目大意

有 n 只熊和若干桶果汁和**恰好一桶酒**，每一天每只熊会选择一些桶（可能不选）并各喝一杯，喝到酒的熊会去睡觉并不再回来，通过这个信息，熊们想知道哪个桶里是酒。只有 p 个睡觉的位置，当睡觉的熊超过了 p 只或者所有熊都在睡觉时熊们就失败了。令 R_i 表示在 i 天内桶的数量最多为多少，使得熊可以成功知道酒的位置。令 $X_i = (i \cdot R_i) \bmod 2^{32}$，你需要求出 $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_q$，其中 $\oplus$ 表示按位异或。

2.2 数据范围

$1 \le n \le 10^9$
$1 \le p \le 130$
$1 \le q \le 2 \times 10^6$

2.3 解题过程

我们可以知道的**全部信息**是：对于 $1 \le i \le n$，第 i 只熊有没有睡觉，如果有，可以知道他是在第几天后去睡觉的。设它是在第 a_i 天之后去睡觉的。

设总天数为 d，以上信息不同情况数是

$$\sum_{i=0}^{p} d^i \binom{n}{i}$$

即枚举有多少熊去睡觉了，以及去睡觉的熊是在第几天去睡觉的。这显然是酒桶数量的一个上界（否则不可能区分所有酒桶的位置）。

现在我们证明这是可以达到的：把所有情况按一定顺序排列，令在第 x 种情况中没有睡觉的熊，一直不选择第 x 桶；在第 a_i 天后睡觉的熊，仅在第 a_i 天选择第 x 桶。这样分配，若酒是第 x 桶，那么得到的信息恰好和这种情况一样（别的桶没有酒，不会产生影响），因此我们区分了所有的情况。

考虑如何计算上面的组合数，方法有很多，这里提供一种：由 $\binom{n}{i} = [x^i](x+1)^n$，利用多项式快速幂可以达到 $\mathcal{O}(p^2 \log n)$ 的复杂度。

最后暴力计算，总复杂度为 $\mathcal{O}(p^2 \log n + p \cdot q)$

3 ARC 091 F - Strange Nim

3.1 题目大意

两个人玩取石子游戏，有 n 堆石子，第 i 堆石子有属性 k_i，初始有 a_i 个。

双方轮流操作，每次轮到的人需要选择一堆石子 i，从中取走至多 $\left\lfloor \frac{x}{k_i} \right\rfloor$ 个，其中 x 是第 i 堆石子当前的个数，不能不取，无法操作的人输。

求先手是否必胜。

3.2 数据范围

$1 \le n \le 200$

$1 \le a_i, k_i \le 10^9$

3.3 解题过程

观察到双方是平等的，且每堆石子独立，可以联想到利用 Sprague-Grundy 定理，问题转化为求出每堆石子的 Grundy number.

设这堆石子的属性 k，令 $g(n)$ 表示石子数量为 n 时的 Grundy number.

引理. $g(n - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor), g(n - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1), \ldots, g(n)$ 构成集合 $\{0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n}{k} \rfloor\}$.

证明. 考虑数学归纳法. 显然 $n = 0$ 时上述引理成立，假设已经证明对于 $n = 0, 1, \ldots, m - 1$ 上述命题成立.

- 若 $k \mid m$，则 $g(m) = \text{mex}(\{0, 1, \ldots, \lfloor \frac{m}{k} \rfloor - 1\}) = \lfloor \frac{m}{k} \rfloor$.
- 若 $k \nmid m$，则 $g(m) = \text{mex}(\{0, 1, \ldots, \lfloor \frac{m}{k} \rfloor\} \setminus \{g(m - \lfloor \frac{m}{k} \rfloor - 1)\}) = g(m - \lfloor \frac{m}{k} \rfloor - 1)$.

其中 $\text{mex}(S)$ （minimum exclusion）表示最小的不在集合 S 中的自然数.

综上，命题对于 $n = m$ 成立. □

从证明过程中可以得到

定理.

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{k}, & k \mid n \\ g(n - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 1), & k \nmid n \end{cases}$$

考虑计算一个 $g(n)$，设 $N = \max_{i=1}^{n} a_i$.

- 若 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor \ge \sqrt{N}$，则转化为求 $g(n - \lfloor \frac{n}{k} \rfloor - 1)$. 每次 n 减少至少 $\sqrt{N}$，至多执行 $\frac{n}{\sqrt{N}} = \mathcal{O}(\sqrt{N})$ 次.
- 若 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor < \sqrt{N}$，则不断减去 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$ 直到 $k | n$ 或 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ 值发生改变. 每次 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ 严格递减，至多执行 $\mathcal{O}(\sqrt{N})$ 次.

综上，求出每个 $g(a_i)$ 的复杂度为 $\mathcal{O}(n\sqrt{N})$
根据 Sprague-Grundy 定理，若 $g(a_i)$ 的异或和非 0 则先手必胜，否则先手必败。