解题报告

杭州第二中学　屠学畅

1 Getting a Jump on Crime[1]

1.1 题目大意

水平面上有 $d_x \times d_y$ 的网格，每个格子的大小是 $w \times w$ 米。记第 i 行第 j 列的格子为 (i,j)。格子 (i,j) 上有 $w \times w \times h_{i,j}$ 米的建筑物。从格子 A 可以跳到格子 B 当且仅当存在满足以下条件的跳跃路径：

- 路径从格子 A 的建筑物顶面的中心出发，到格子 B 的建筑物顶面的中心结束。
- 路径是一条以初速度 v 起跳，受重力加速度 g 影响的抛物线。
- 路径不能进入建筑物内部。

求从 (l_x, l_y) 出发能否到达每个格子以及到达每个格子的最小跳跃次数。

1.2 数据范围

$1 \le d_x, d_y \le 20$
$1 \le v, w, h_{i,j} \le 1000$
$1 \le l_x \le d_x, 1 \le l_y \le d_y$

1.3 解题过程

由于格子的数量很少，可以对于每一对格子计算能否进行跳跃。

考虑从格子 (a,b) 出发尝试跳到 (c,d)，其水平距离 $x = w \times \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$，高度差 $h = h_{c,d} - h_{a,b}$。设水平初速度 v_x，竖直初速度 v_h，则

$$v_x^2 + v_h^2 = v^2 \tag{1}$$

设最大上升高度 H，则

$$H = \frac{v_h^2}{2g} \tag{2}$$

设总时间为 t。考虑水平的运动，则

$$v_x \times t = x \tag{3}$$

考虑竖直的运动，则

$$t = \frac{v_h}{g} + \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \tag{4}$$

[1]Problem E, 2018 ACM-ICPC World Finals

将 (2) 代入 (4) 消去 H，再将 t 代入 (3) 消去 t，化简得到

$$2hv_x^2 - 2xv_hv_x + gx^2 = 0 \tag{5}$$

设 $A = 2h, B = -2x, C = gx^2$，则 (5) 化为 $Av_x^2 + Bv_xv_h + C = 0$。代入 $v_h = \sqrt{v^2 - v_x^2}$，化简得到

$$(A^2 + B^2)v_x^4 + (2AC - B^2v^2)v_x^2 + C^2 = 0 \tag{6}$$

这是关于 v_x^2 的二次方程，而 $v_x > 0$，最终可以得到两个正根，这是两条合法的路径（不考虑与建筑物冲突）。容易发现 v_x 较小的路径优于 v_x 较大的路径（在每个点均不低于后者），因此只需要检验这一条路径是否会进入建筑内部即可。

检验时考虑路径在水平方向上经过的每个格子，在该格子上方的部分是原路径的一个区间，因为是抛物线，其最低点必然出现在两端，即与格子的交界处。于是可以将平面上两个方向分开考虑，每次经过交界处时判断是否低于建筑物，总次数 $O(d_x + d_y)$。

结合前面枚举每对格子，总复杂度 $O(d_x^2d_y^2(d_x + d_y))$。

得到跳跃关系后，利用广度优先搜索可以在 $O(d_x^2d_y^2)$ 的复杂度内完成答案的计算。

2 Son of Pipe Stream[2]

2.1 题目大意

给定一张 n 个点 m 条边的无向图，第 i 条边有容量 c_i。

液体 F 从 1 号点流向 3 号点，液体 W 从 2 号点流向 3 号点。第 i 条管道中液体 F 和 W 要保证同向，设其流量分别为 f 和 w，需要满足 $v \times f + w \le c_i$，其中 v 是一个给定的实数。除了各自的源点和汇点，液体 F 和 W 要在每个点分别保持流量守恒。

设 3 号点液体 F 和 W 的总流量分别为 F 和 W，最大化 $F^a W^{1-a}$，其中 a 是一个给定的实数，要求输出每条边的方向及液体 F 和 W 的流量。

2.2 数据范围

$1 \le n \le 200$

$1 \le m \le \frac{n(n-1)}{2}$

$1 \le c \le 10$

$1 \le v \le 10$

$0.01 \le a \le 0.99$

2.3 解题过程

引理 1. *$v = v_0$ 时的答案是 $v = 1$ 时答案的 v_0^{-a} 倍。*

证明. 对于 $v = v_0$ 时的一个合法的网络流 $\vec{f}$（每条边有两种液体的流量），将其每条边上液体 F 的流量变成 v_0 倍，得到 $\vec{f}'$。容易发现 $\vec{f}'$ 在 $v = 1$ 时合法，且价值 $F^a W^{1-a}$ 变成了 v_0^a 倍。这样的对应关系构成了一个双射，因此两种情况下的最大值也是 v_0^a 倍关系。 □

观察发现最优的方案类似一种从 1 和 2 号点到 3 号点的最大流。考虑求出总的最大流（建立超级源向 1 和 2 连容量为无穷大的边），设为 Z。假设这些流量可以任意分配给液体 F 和 W，即设液体 F 和 W 的流量分别为 F 和 W，且 $W = Z - F$。代入答案的表达式并令其关于 F 的导数为零

$$\left(F^a (Z-F)^{1-a}\right)' = a \cdot F^{a-1}(Z-F)^{1-a} - (1-a) \cdot F^a (Z-F)^{-a} = 0$$

解得 $F = a \cdot Z$，此时原式取得最大值。

回到前面的假设，一个显然的问题是 F 并不能任意大，其上界是 1 到 3 的最大流 $F_{\max}$。同理 W 的上界是 2 到 3 的最大流 $W_{\max}$。

引理 2. *对于任意实数 t $(0 \le t \le 1)$，存在一种方案满足 $F = t \cdot (Z - W_{\max}) + (1-t) \cdot F_{\max}, W = t \cdot W_{\max} + (1-t) \cdot (Z - F_{\max})$。*

[2] Problem J, 2017 ACM-ICPC World Finals

证明. 如果从超级源出发优先经过 1 号点增广，则可以得到 $F=F_{\max}, W=Z-F$ 的解 $\vec{f_0}$（每条边不区分两种液体，F 和 W 的值分别等于超级源与 1 和 2 号点连边的流量大小），满足上述 $t=0$ 的条件。同理优先经过 2 号点的解 $\vec{f_1}$ 可以满足 $t=1$ 的条件。对于 $0<t<1$，定义 $\vec{f_t}=t\cdot\vec{f_1}+(1-t)\cdot\vec{f_0}$,即每条边的流量是 $\vec{f_0}$ 和 $\vec{f_1}$ 两种方案的线性组合（方向相反则相抵消）。容易发现 $\vec{f_t}$ 仍然满足原图的容量限制,且可以计算 F 和 W 的值符合上述命题。因此对于 $0\le t\le 1$，都有方案 $\vec{f_t}$ 满足 $F=t\cdot(Z-W_{\max})+(1-t)\cdot F_{\max}, W=t\cdot W_{\max}+(1-t)\cdot(Z-F_{\max})$。 □

引理 3. 最优解中，液体 F 的总流量 F^* 是区间 $[Z-W_{\max}, F_{\max}]$ 中最接近 $a\cdot Z$ 的数，液体 W 的总流量 $W^*=Z-F^*$。

证明. 根据引理 2，上述解存在。对于任意一种解，两种液体流量为 F 和 W。若 $F+W<Z$，则任意增广后答案不会变小，最终会得到一组 $F+W=Z$ 的解。若 $F+W=Z$，由导数推知答案函数的单调性，这组解不会优于上述解。因此所有解均不优于上述解。 □

得到最优解的流量后，将超级源出边容量设为对应液体的总流量，可以得到一组流。为了输出每条边每种液体的流量，需要将每条边定向以及定容为这一组流中该条边的流量，然后只保留超级源向 1 号点的连边，此时得到的最大流即为液体 F 的具体流量，剩余容量即液体 W 的流量。

时间复杂度 $O(\mathrm{MaxFlow}(n,m))$，其中 $\mathrm{MaxFlow}(n,m)$ 表示 n 个点 m 条边的图的最大流复杂度。

3 Hypercube[3]

3.1 题目大意

给出一个三维空间中八个立方体通过面与面重合而相连形成的树状的结构，问能否在四维空间中通过沿着公共面旋转得到一个四维超立方体。

3.2 数据范围

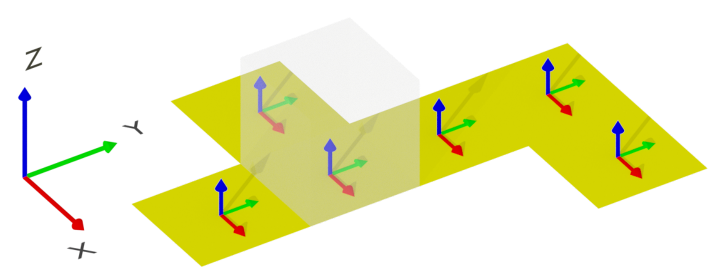
无。

3.3 解题过程

四维的情况较为抽象，可以尝试先解决三维的问题：二维平面中六个正方形通过边重合而相连形成树状的结构，判断能否在三维空间中沿着公共边旋转得到一个三维立方体。

由于立方体的六个面的对称性，不妨指定任意一个正方形为立方体的底面。接下来扩展到相邻的其他正方形，每个正方形将唯一对应到一个面，通过旋转可以将其移动至正确位置。整个过程可以用 DFS 完成，最后判断六个正方形是否一一对应了立方体的六个面即可。如何简单地模拟这一旋转的过程？

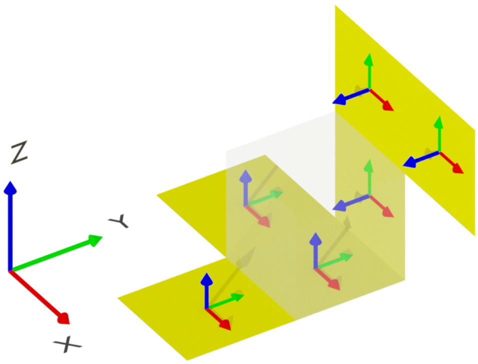
图 1: 初始状态



对于每一个正方形记录三个向量，其中两个张成正方形所在的平面，另一个是该平面的法向量，初始分别指向 X, Y, Z 轴正方向。向量跟随正方形一起旋转，且一个正方形旋转时带动与其连通的所有尚未确定位置的正方形。可以发现任意两个相邻的未确定位置的正方形的旋转情况是相同的，且一个已经确定位置的正方形的位置由法向量唯一确定。

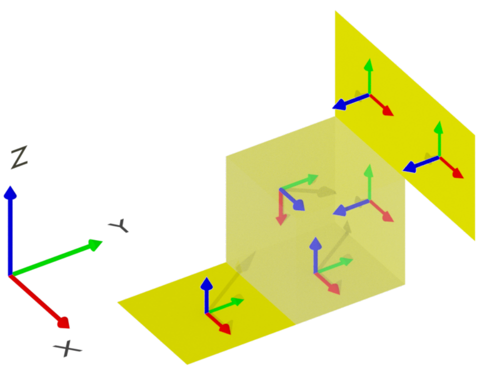
[3]Problem H, 2015-2016 ACM-ICPC Northeastern European Regional Contest (NEERC 15)

图 2: 一次旋转后



当完成一个正方形的旋转后，需要依次进行相邻的其他正方形的旋转，此时可以根据向量信息来计算下一个正方形的旋转方式。以上图为例，被旋转的正方形位于已经被确定为底面的正方形的 Y 轴正方向，则需要进行的是绕它们的公共边（平行于 X 轴，正方向为 X 轴正方向）旋转 90°（按照右手螺旋的方向）。旋转后红色向量不变，绿色和蓝色向量交换，且蓝色向量反向。

图 3: 两次旋转后



第二次旋转时，绿色向量不变，交换红色和蓝色向量，且红色向量反向。

将以上过程一般化：记 A 为正方形（在原题中为立方体，以下统称正方形）的法向量。需要旋转一个新的正方形时，设新正方形和原正方形重心连线与向量 B 平行，显然有 $A \perp B$。则旋转过程中 A 和 B 交换，且若新正方形在原正方形的向量 B 的正方向，则 A 反向，否则 B 反向，其余向量不变。

每个向量由一个维度和一个方向构成，在程序实现中能够方便地维护。

时间复杂度 $O(1)$。

参考文献

[1] Per Austrin, Jakub Onufry Wojtaszczyk, ACM ICPC World Finals 2018 Solution sketches. https://www.csc.kth.se/~austrin/icpc/finals2018solutions.pdf.

[2] Per Austrin, Jakub Onufry Wojtaszczyk, ACM ICPC World Finals 2017 Solution sketches. https://www.csc.kth.se/~austrin/icpc/finals2017solutions.pdf.

[3] Roman Elizarov, ACM ICPC 2015 NEERC (Northeastern European Regional Contest) Problems Review. https://www.slideshare.net/elizarov/acm-icpc-2015-neerc-northeastern-european-regional-contest-problems-review.